Option "Mathématiques" (M')

MATHEMATIQUES II

Durée : 4 heures

On désigne par $\mathbf{N}^*$ l'ensemble des entiers strictement positifs, par $\mathbf{R}$ le corps des nombres réels, on appelle support d'une application f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ et on note supp f le plus petit fermé dans le complémentaire duquel la restriction de f est nulle. Le complémentaire de B dans A est noté $A \setminus B$.

Si f appartient à l'ensemble $\mathcal{E}$ des applications de l'intervalle $[-1, +1]$ dans $\mathbf{R}$ deux fois continûment dérivables,

on note $I_f = \{x \in [-1, +1], f'(x) = 0\}$

et $E_f = f([-1, +1]) \setminus \{f(-1), f(+1)\}$.

I

1° Soient γ_1 la fonction numérique définie sur $\mathbf{R}$ par

$$\gamma_1(t) = 0 \quad \text{si} \quad t \leqslant 0, \quad \gamma_1(t) = e^{-1/t} \quad \text{si} \quad t > 0$$

et γ la fonction numérique définie sur $\mathbf{R}$ par

$$\gamma(t) = \gamma_1(t+1) \cdot \gamma_1(-t+1).$$

Montrer que γ_1 et γ sont indéfiniment dérivables et que supp $\gamma \subset [-1, +1]$.

2° En utilisant la fonction γ, construire une suite $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbf{N}^*}$ de fonctions positives et indéfiniment dérivables vérifiant

$$\text{supp } \varphi_n \subset \left[-\frac{1}{n}, +\frac{1}{n}\right] \qquad \text{et} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(t)\, dt = 1.$$

II

Soit f un élément de $\mathcal{E}$.

1° *a.* Montrer que si y est un élément de $E_f \setminus f(I_f)$ l'ensemble $f^{-1}(y)$ est fini.

b. Soit $f^{-1}(y) = \{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ et des intervalles ouverts $U_1, U_2, \ldots, U_p$ contenant respectivement $x_1, x_2, \ldots, x_p$ tels que les restrictions de f à U_k, $1 \leqslant k \leqslant p$, soient des bijections sur $]y - \varepsilon, y + \varepsilon[$.

c. Montrer que pour n assez grand on a

$$\int_{-1}^{+1} \varphi_n(f(t) - y) f'(t)\, dt = \sum_{k=1}^{p} \text{sign } f'(x_k),$$

avec sign $u = +1$ si $u > 0$, sign $u = -1$ si $u < 0$.

2° *a.* Soit v une fonction continue à support contenu dans l'intervalle $[\alpha, \beta]$, montrer que v admet une primitive à support contenu dans $[\alpha, \beta]$ si et seulement si $\int_{\alpha}^{\beta} v(t)\, dt = 0$.

b. Montrer que si y_1 et y_2 appartiennent à un même intervalle ouvert contenu dans $E_f \setminus f(I_f)$, on a

$$\sum_{x \in f^{-1}(y_1)} \text{sign } f'(x) = \sum_{x \in f^{-1}(y_2)} \text{sign } f'(x).$$

III

1° Si $h \in \mathbf{N}^*$ on définit pour $n = 0, 1, \ldots, h-1$

$$J_{n,h} = \left[-1 + \frac{2n}{h}, -1 + \frac{2(n+1)}{h}\right].$$

Montrer qu'il existe une constante M telle que $f(I_f \cap J_{n,h})$ soit contenu dans un intervalle de longueur inférieure à M/h^2.

2° Montrer que l'ensemble $f(I_f)$ peut être, pour tout $\varepsilon > 0$, recouvert par un nombre fini d'intervalles dont la somme des longueurs est inférieure à ε.

IV

Soient f un élément de $\mathcal{E}$ vérifiant

$$I_f = \varnothing, \quad f'(0) = 1, \quad |f(x)| < x \quad \text{si} \quad x \in]0, 1]$$

.../...

et a vérifiant $0 < f(a) < a < 1$,

on note pour $n \in \mathbf{N}^*$ et $b \in [f(a), a]$

$$\theta_n(b) = \frac{f^n(a) - f^n(b)}{f^n(a) - f^{n+1}(a)}$$

avec

$$f^0(x) = x \quad \text{et} \quad f^n(x) = f(f^{n-1}(x)).$$

1° Montrer que θ_n est un homéomorphisme de $[f(a), a]$ sur $[0, 1]$.

2° Montrer qu'il existe $\alpha_n \in [f^n(b), f^n(a)]$ tel que

$$\frac{f^n(a) - f^{n+1}(a)}{f^n(b) - f^{n+1}(b)} = \frac{1}{1 - (1 - f'(\alpha_n))\,\theta_n(b)}.$$

En déduire que $\lim_{n \to \infty} \dfrac{f^n(a) - f^{n+1}(a)}{f^n(b) - f^{n+1}(b)} = 1$.

3° Soit $\{(u_k, v_k)\}_{k \in \mathbf{N}^*}$ une suite de points de $f^k(\mathrm{I}) \times f^k(\mathrm{I})$ où I est un intervalle contenu dans $]f(a), a[$.

Montrer que la série $\sum_{k \geqslant 1} (u_k - v_k)$ est convergente.

4° Montrer qu'il existe un couple (β, γ) de points de $]f(a), a[$ tel que

$$\theta_n(b) = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{f'(f^k(\beta))}{f'(f^k(\gamma))} \cdot \frac{a - b}{a - f(a)}.$$

5° *a.* Montrer qu'il existe δ_k, u_k, v_k appartenant à $f^k(]f(a), a[)$ tels que

$$\log \theta_n(b) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f''(\delta_k)}{f'(\delta_k)} (u_k - v_k) + \log \frac{a - b}{a - f(a)}.$$

b. En déduire que la suite $\{\theta_n\}_{n \in \mathbf{N}^*}$ converge sur $[f(a), a]$ vers une fonction continue, décroissante de $[f(a), a]$ sur $[0, 1]$.

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail